



全品高考

第三轮专题

主编：肖德好

数学 新高考 作业手册

???

第一二三轮专题上、下册目录表 (含目录页) 附赠资料清单表
第三轮专题上、下册目录表 (含目录页) 附赠资料清单表

例 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-1, 2)$ ，则 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
 $f(x) = 0$ ，且 $f'(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 $(-1, 2)$ 上为增函数，在 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ 上为减函数

例 设 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ，则 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为增函数，在 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 上为减函数

例 设 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ，则 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为增函数，在 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 上为减函数

$y = f(x)$ 的图像与 x 轴交于 A, B 两点， $A > 0$ 在上， $A < 0$ 在下

二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ ，则 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $(-1, 2)$

例 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴交于 A, B 两点， $A > 0$ 在上， $A < 0$ 在下

$y = f(x)$ 的图像与 x 轴交于 A, B 两点， $A > 0$ 在上， $A < 0$ 在下

例 设 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ，则 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为增函数，在 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 上为减函数

CONTENTS

目录

限时集训(一)	微专题 1 三角函数的图象与性质、三角恒等变换	167
限时集训(二)	微专题 2 平面向量	169
限时集训(三)	微专题 3 解三角形	171
提能特训(一)	高分提能一 多三角形问题	173
限时集训(四)	微专题 4 等差数列、等比数列	175
限时集训(五)	微专题 5 递推数列与数列求和	177
限时集训(六)	微专题 6 数列与其他知识的交汇问题	179
提能特训(二)	高分提能二 数列新定义创新问题	181
限时集训(七)	微专题 7 空间几何体	183
限时集训(八)	微专题 8 几何体的切接问题与嵌套问题	185
限时集训(九)	微专题 9 空间角与空间距离问题	187
限时集训(十)	微专题 10 立体几何中的截面与动态问题	190
限时集训(十一)	微专题 11 计数原理与排列组合、二项式定理	191
限时集训(十二)	微专题 12 统计与成对数据的统计分析	193
限时集训(十三)	微专题 13 概率及性质、条件概率	196
限时集训(十四)	微专题 14 随机变量的分布列与数学期望	199
提能特训(三)	高分提能三 概率、变量分布与其他知识的综合问题	202
限时集训(十五)	微专题 15 直线与圆	204
限时集训(十六)	微专题 16 圆锥曲线的定义与性质	206
限时集训(十七)	微专题 17 圆锥曲线热点问题(一) 求值计算类	208
限时集训(十八)	微专题 18 圆锥曲线热点问题(二) 位置关系类	210
提能特训(四)	高分提能四 圆锥曲线中非对称韦达定理的解题技巧	212
提能特训(五)	高分提能五 圆锥曲线与其他知识的综合问题	213
限时集训(十九)	微专题 19 函数图象与性质的应用	215
限时集训(二十)	微专题 20 基本初等函数与函数模型	217
限时集训(二十一)	微专题 21 不等式	219
限时集训(二十二)	微专题 22 利用导数研究函数性质	220
限时集训(二十三)	微专题 23 零点问题	222
提能特训(六)	高分提能六 隐零点问题的处理技巧	224
限时集训(二十四)	微专题 24 恒成立问题与能成立问题	225
提能特训(七)	高分提能七 必要性探路——端点效应	226
限时集训(二十五)	微专题 25 不等式的证明	227
提能特训(八)	高分提能八 极值点偏移与零点偏移	229
限时集训(二十六)	微专题 26 切线放缩与构造	231

基础过关

1. [2024·湛江二模] 函数 $f(x) = 4\sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{5}\right]$ 上的取值范围为 ()
- A. $[-2, 2]$ B. $[-2, 4]$
C. $[-2\sqrt{3}, 4]$ D. $[-2\sqrt{3}, 2]$

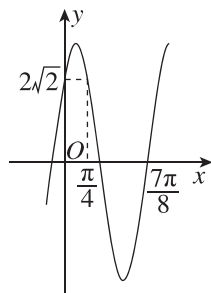
2. [2024·合肥三模] 已知 $2\sin \alpha = 1 + 2\sqrt{3}\cos \alpha$, 则 $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$ ()
- A. $-\frac{1}{8}$ B. $-\frac{7}{8}$
C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{7}{8}$

3. [2024·太原三模] 已知函数 $f(x) = a\sin x + \cos x$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 则函数 $g(x) = \sin x + a\cos x$ 的图象关于 ()
- A. 点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称 B. 点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称
C. 点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 对称 D. 点 $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ 对称

4. [2024·南通二模] 若 $\cos \alpha, \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ 成等比数列, 则 $\sin 2\alpha =$ ()
- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$
C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{4}$

5. [2024·桂林三模] 已知函数 $f(x) = \cos \omega x - 2\sin 2\omega x \sin \omega x (\omega > 0)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有最小值没有最大值, 则 ω 的取值范围是 ()
- A. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
C. $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ D. $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$

6. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 的部分图象如图所示, 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若 $g(x_0) = 1$, 则 $|f(x_0)| =$ ()



- A. 1 B. 2
C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{15}$
7. 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), 2(\sin \beta + \sin^2 \beta) = \frac{\sin 2\beta}{\tan \alpha}$, 则 $\tan\left(2\alpha + \beta + \frac{\pi}{6}\right) =$ ()
- A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$
8. (多选题)[2024·诸暨三模] 若 $\frac{\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x} = 1$, 则 ()
- A. $\tan x = 2$ B. $\sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
C. $\tan 2x = \frac{4}{5}$ D. $\sin 2x = \frac{4}{5}$

8. (多选题) 已知向量 $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{b} = (6, -2)$, 则 ()
- A. $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$
- B. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{65}$
- C. \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$
- D. \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 上的投影向量为 $-\frac{1}{4}\mathbf{b}$

9. (多选题) [2024 · 宁波二模] 若平面向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 1, |\mathbf{c}| = 3$ 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, 则 ()
- A. $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|$ 的最小值为 2
- B. $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|$ 的最大值为 5
- C. $|\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}|$ 的最小值为 2
- D. $|\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}|$ 的最大值为 $\sqrt{13}$

10. [2021 · 新高考全国II卷] 已知向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 2$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} =$ _____.

11. [2024 · 安徽安庆模拟] 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3, AC = 4, \angle BAC = \frac{\pi}{3}, \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, P$ 在 CD 上, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{AD}$, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.

12. 平面向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\pi}{3}, \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \frac{\pi}{6}$, 且 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}| = 3, |\mathbf{b}| = 2$, 则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| =$ _____.

能力提升

13. 平面内互不重合的点 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, B_4$, 若 $|\overrightarrow{A_1 B_i} + \overrightarrow{A_2 B_i} + \overrightarrow{A_3 B_i}| = i$, 其中 $i = 1, 2, 3, 4$, 则 $|B_1 B_2| + |B_2 B_3| + |B_3 B_4|$ 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{4}{3}, \frac{8}{3}]$ B. $[\frac{4}{3}, \frac{16}{3}]$
- C. $[\frac{4}{3}, \frac{10}{3}]$ D. $[1, 5]$

14. (多选题) [2024 · 苏锡常镇四市二调] 在长方形 $ABCD$ 中, $AB = 8, AD = 6$, 点 E, F 分别为边 BC 和 CD 上两个动点(含端点), 且 $EF = 5$, 设 $\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DF} = \mu\overrightarrow{DC}$, 则 ()

- A. $\frac{1}{6} \leq \lambda \leq 1, \frac{3}{8} \leq \mu \leq 1$
- B. $\lambda + \mu$ 为定值
- C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值为 50
- D. $|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}|$ 的最大值为 $\sqrt{265}$

15. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 $|\overrightarrow{AB}| = 2, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = -1, \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$, 则 $\angle ABC$ 的最大值为 _____.

基础过关

- [2024·新课标II卷] 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A + \sqrt{3}\cos A = 2$.
 - 求 A ;
 - 若 $a = 2, \sqrt{2}b\sin C = c\sin 2B$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.
- $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a\cos B - b\cos A = b + c$.
 - 求角 A 的值;
 - 若 $a = 2\sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c .
- [2024·广东惠州一模] 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边. 若向量 $m = (a, \cos A)$, 向量 $n = (\cos C, c)$, 且 $m \cdot n = 3b\cos B$.
 - 求 $\cos B$ 的值;
 - 若 $2a, b, c$ 成等比数列, 求 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C}$ 的值.

4. [2024·湖北武汉模拟] 已知锐角三角形 ABC 的三个内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $b^2 + c^2 - (b \cdot \cos C + c \cdot \cos B)^2 = bc$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 如果该三角形外接圆的半径为 $\sqrt{3}$, 求 bc 的取值范围.

6. [2024·南昌模拟] $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 b 是 a, c 的等比中项.

(1) 求 B 的最大值;

(2) 若 C 为钝角, 求 $\frac{a \cos B + b \cos A}{b \cos C + c \cos B}$ 的取值范围.

能力提升

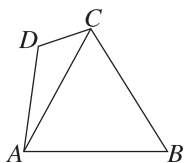
5. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \lambda \vec{AB}^2$.

(1) 若 $\lambda = 1$, 判断 $\triangle ABC$ 的形状;

(2) 若 $\lambda = \frac{1}{2}$, 求 $\tan(B-A)$ 的最大值.

基础过关

- 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,若 $b = c$, D 为 AC 的中点, $b \sin A = 2 \sin \angle ABD$,则 $BD =$ ()
 A. 1 B. $\sqrt{2}$
 C. $\sqrt{3}$ D. 2
- [2024·广东广州模拟] 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,若 $c = 3, b = 2$, $\angle BAC$ 的平分线 AD 的长为 $\frac{4\sqrt{6}}{5}$,则 BC 边上的中线 AH 的长等于 ()
 A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{17}}{4}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
- [2024·重庆八中三模] 若圆内接四边形 $ABCD$ 满足 $AC = 2, \angle CAB = \angle CAD = 30^\circ$,则四边形 $ABCD$ 的面积为 ()
 A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 3 D. $2\sqrt{3}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AC}, \angle ADB = \frac{\pi}{3}$,若 $CD = 2$,则 $\frac{BC^2}{BA^2}$ 的最大值为 ()
 A. $\sqrt{3}$ B. 2
 C. $\sqrt{7} - 2$ D. $\frac{\sqrt{3} + 2}{2}$
- (多选题)[2024·湖北鄂州一模] 如图,在锐角三角形 ABC 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,若 $\sin A = \sin B$,且 $\sqrt{3}(a \cos B + b \cos A) = 2c \sin C$, D 是 $\triangle ABC$ 外一点且 B, D 在直线 AC 异侧, $DC = 2, DA = 6$,则下列说法正确的是 ()
 A. $\triangle ABC$ 是等边三角形
 B. 若 $AC = 2\sqrt{13}$,则 A, B, C, D 四点共圆
 C. 四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 $10\sqrt{3} - 12$
 D. 四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $10\sqrt{3} + 12$

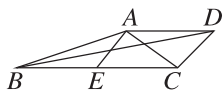


- 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle DAC = \frac{\pi}{6}, AC = 2\sqrt{2}, CD = 2, D$ 为边 BC 上的一点,且 $AD \perp AB$,则 $AB =$ _____.
- [2024·南通二调] 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{7}, AC = 1, M$ 为 BC 的中点, $\angle MAC = 60^\circ$,则 $AM =$ _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2AC, AD$ 是 $\angle A$ 的角平分线,且 $\triangle ABC$ 的面积为1,当 BC 最短时, $\frac{AD}{AC} =$ _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中,点 D 在边 AB 上, $BD = 2AD, \angle ACD = 45^\circ, \angle BCD = 90^\circ$.
 (1)求证: $BC = \sqrt{2}AC$;
 (2)若 $AB = \sqrt{5}$,求 BC 和 CD 的长.

10. [2024·云南楚雄模拟] 如图,在四边形 $ABCD$ 中, E 为 BC 的中点, $AB=3, AC=2,$
 $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$.

(1)求 $\cos \angle AEC$;

(2)若 $AE \parallel CD, CD = \frac{\sqrt{7}}{2}$,求 BD .



12. [2024·湖南长沙一中一模] 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,已知
 $\tan C + \sqrt{3} = \tan B(\sqrt{3} \tan C - 1)$,

(1)求角 A ;

(2)若 $a = \sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 所在平面内有一点 D 满足 $\angle BDC = \frac{2}{3}\pi$,且 BC 平分 $\angle ABD$,求 $\triangle ACD$ 面积的取值范围.

能力提升

11. [2024·福建泉州模拟] 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,已知 $a < b < c$ 且 $\tan A, \tan B, \tan C$ 均为整数.

(1)证明: $\tan^2 B - 1 = \tan A \tan C$;

(2)设 AC 的中点为 D ,求 $\angle CDB$ 的余弦值.

能力提升

13. [2024·东北三省三校三模] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $S_n=3a_n-2^n$.

(1)求证:数列 $\{a_n-2^n\}$ 是等比数列;

(2)设 $b_n=a_n+\lambda\cdot 2^n-(\lambda+1)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$,若 $\{b_n\}$ 是递增数列,求实数 λ 的取值范围.

14. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $a_1=1, S_{n+1}^2-S_n^2=8n, n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求 a_n ;

(2)在数列 $\{a_n\}$ 的每相邻两项 a_k, a_{k+1} 之间依次插入 a_1, a_2, \dots, a_k ,得到数列 $\{b_n\}: a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$,求 $\{b_n\}$ 的前100项和.



10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}, a_n - a_{n+1} - a_n a_{n+1} = 0$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1, b_{2n} - b_{2n-1} = b_{2n+1} - b_{2n} = \frac{1}{a_n}$, 求证: $\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_4} + \dots + \frac{1}{b_{2n}} < \frac{3}{4}$.

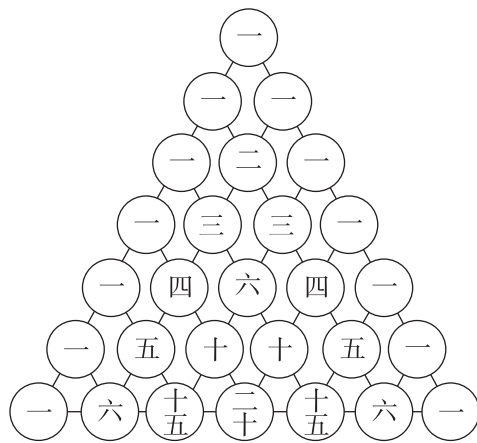
能力提升

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n > 0, a_1 = 3$, 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的乘积为 S_n , 且 $S_n = \sqrt{a_n^{n+1}}$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n \in (n-1, n)$.

12. 我国南宋时期的数学家杨辉, 在他 1261 年所著的《详解九章算法》一书中, 用如图的三角形解释二项和的乘方规律. 此图称为“杨辉三角”, 也称为“贾宪三角”. 在此图中, 从第三行开始, 首尾两数为 1, 其他各数均为它肩上两数之和.

(1) 把“杨辉三角”中第三斜列各数取出按原来的顺序排列得一数列: 1, 3, 6, 10, 15, \dots , 写出 a_n 与 a_{n-1} ($n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$) 的递推关系, 并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \dots + \frac{1}{n}b_n = 2a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 设数列 $\{c_n\}$ 满足: $c_n = \frac{2n+1}{b_n b_{n+1}}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $T_n < \frac{n}{n+1}\lambda$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 恒成立, 试求实数 λ 的取值范围.



8. [2024·广东广州模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列,且 $a_1=2$.

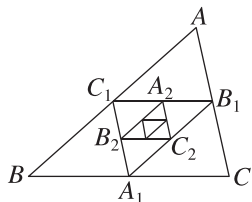
(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若存在 $n \in \mathbf{N}^*$,使得 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} \geq \lambda a_{n+1}$ 成立,求实数 λ 的取值范围.

9. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 $a=3, (a-b)(\sin A + \sin B) = (c-b)\sin C$.连接 $\triangle ABC$ 的各边中点得 $\triangle A_1 B_1 C_1$,再连接 $\triangle A_1 B_1 C_1$ 的各边中点得 $\triangle A_2 B_2 C_2 \dots$ 如此继续下去,记 $\triangle ABC, \triangle A_1 B_1 C_1, \triangle A_2 B_2 C_2 \dots$ 的面积分别为 $S_0, S_1, S_2 \dots$.

(1)求 S_0 的最大值;

(2)若 $S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_n > \frac{6069\sqrt{3}}{2024}$,求整数 n 的最小值.



能力提升

10. 在直角坐标平面内,将函数 $f(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$ 及

$g(x) = \frac{1}{3x}$ 在第一象限内的图象分别记作 C_1, C_2 ,点 $P_n(a_n, f(a_n)) (n \in \mathbf{N}^*)$ 在 C_1 上.过 P_n 作平行于 x 轴的直线,与 C_2 交于点 Q_n ,再过点 Q_n 作平行于 y 轴的直线,与 C_1 交于点 P_{n+1} .

(1)若 $a_1 = \frac{1}{3}$,请直接写出 a_2, a_3 的值;

(2)若 $0 < a_1 < \frac{1}{2}$,求证: $\left\{\frac{a_n - \frac{1}{2}}{a_n + \frac{1}{3}}\right\}$ 是等比数列.

(3)若 $a_1 = \frac{1}{3}$,求证: $|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \dots + |a_{n+1} - a_n| < \frac{4}{3}$.

基础过关

1. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的最大值记为 M_n ,即 $M_n = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$;前 n 项的最小值记为 m_n ,即 $m_n = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$,令 $p_n = M_n - m_n$,并将数列 $\{p_n\}$ 称为 $\{a_n\}$ 的“生成数列”.

(1) 设数列 $\{p_n\}$ 的“生成数列”为 $\{q_n\}$,求证:

$p_n = q_n$;

(2) 若 $a_n = 2^n - 3n$,求其生成数列 $\{p_n\}$ 的前 n 项和.

2. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 $1, 2, 3, \dots, n$ 的一个排列,若该排列中有且仅有一个 i 满足 $a_i > a_{i+1}, i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$,则称该排列满足性质 T .对任意正整数 n ,记 d_n 为满足性质 T 的排列 a_1, a_2, \dots, a_n 的个数.

(1) 求 d_1, d_2, d_3 的值;

(2) 若 $n=4$,求满足性质 T 的所有排列的情形;

(3) 求数列 $\{d_n\}$ 的通项公式.

能力提升

3. 有穷数列 $a_1, a_2, \dots, a_n (n > 2)$ 中, 令 $S(p, q) = a_p + a_{p+1} + \dots + a_q (1 \leq p \leq q \leq n, p, q \in \mathbf{N}^*)$.
- (1) 已知数列 $-3, 2, -1, 3$, 写出所有的有序数对 (p, q) , 且 $p < q$, 使得 $S(p, q) > 0$;
- (2) 已知整数列 a_1, a_2, \dots, a_n, n 为偶数, 若 $S(i, n-i+1) (i=1, 2, \dots, \frac{n}{2})$ 满足: 当 i 为奇数时, $S(i, n-i+1) > 0$; 当 i 为偶数时, $S(i, n-i+1) < 0$. 求 $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ 的最小值;
- (3) 已知数列 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $S(1, n) > 0$, 定义集合 $A = \{i | S(i+1, n) > 0, i=1, 2, \dots, n-1\}$. 若 $A = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} (k \in \mathbf{N}^*)$ 且为非空集合, 求证: $S(1, n) > a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}$.

4. [2024 · 河南信阳二模] 已知函数 $y=f(x)$, 其中 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2, k \in \mathbf{R}$. 若点 A 在函数 $y=f(x)$ 的图象上, 且经过点 A 的切线与函数 $y=f(x)$ 图象的另一个交点为点 B , 则称点 B 为点 A 的一个“上位点”, 现有函数 $y=f(x)$ 图象上的点列 $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$, 使得对任意正整数 n , 点 M_n 都是点 M_{n+1} 的一个“上位点”.
- (1) 若 $k=0$, 请判断原点 O 是否存在“上位点”, 并说明理由;
- (2) 若点 M_1 的坐标为 $(3k, 0)$, 请分别求出点 M_2, M_3 的坐标;
- (3) 若 M_1 的坐标为 $(3, 0)$, 记点 M_n 到直线 $y=m$ 的距离为 d_n . 问是否存在实数 m 和正整数 T , 使得无穷数列 $d_T, d_{T+1}, \dots, d_{T+n}, \dots$ 严格减? 若存在, 求出实数 m 的所有可能值; 若不存在, 请说明理由.